DRAAIENDE VOORWERPEN

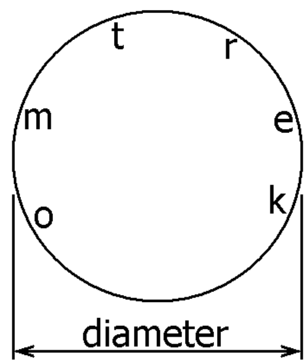
§ 1 Hoeksnelheid

Belangrijkste grootheden en eenheden in deze paragraaf

In de volgende tabel staan de belangrijkste grootheden en eenheden van deze paragraaf. Deze worden na de tabel besproken.

Grootheden	Eenheden
r = straal	m = meter (of bijv. centimeter)
s = booglengte	m = meter (of bijv. centimeter)
φ = hoek of hoekverdraaiing	rad = radiaal
t = tijdsduur	s = seconde
ω = hoeksnelheid	rad/s = radiaal per seconde

Getal pi



In de figuur hiernaast is een cirkel getekend. Er zijn twee lengtes aangegeven, namelijk de omtrek en de diameter. Bij elke cirkel (groot en klein) is de omtrek van de cirkel ongeveer 3,14 keer zo groot als de diameter. Dit getal wordt in de wiskunde met het getal pi (Griekse letter π) aangeduid. Hiervoor geldt dus:

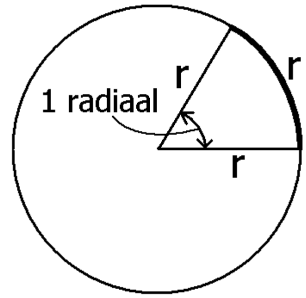
$$\pi = \frac{\text{omtrek}}{\text{diameter}}$$

Pi kan als een getal met oneindig veel decimalen (cijfers achter de komma) geschreven worden. Hieronder staat bijvoorbeeld het getal pi met zijn eerste duizend decimalen.

pi = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211
70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930
38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491
41273 72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151
16094 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011
94912 98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694
05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872 14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925
89235 42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960 51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096
31859 50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193 11881 71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691
47303 59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778 18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642
01989

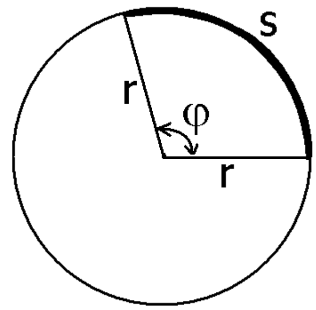
Uit de bovenstaande formule volgt:
omtrek = π·diameter
In de natuurkunde werken we meestal niet met de diameter, maar met de straal (symbool r). De straal is de helft van de diameter. Zo komen we tot het volgende belangrijke resultaat:
omtrek = 2·π·*r*.

Radiaal



De grootte van een hoek kan naast graden ook in radialen worden uitgedrukt. Onder een radiaal verstaan we de hoek, gemeten vanuit het middelpunt van een cirkel, waarbij de lengte van de boog gelijk is aan de straal r. Zie de figuur hiernaast. De afkorting voor radiaal is rad. Een radiaal is een veel natuurlijker eenheid voor een hoek dan een graad. Een radiaal komt overeen met 57,3 graden.

Hoek, uitgedrukt in radialen



In de figuur hiernaast is een hoek φ (spreek uit: fie) getekend vanuit het middelpunt van een cirkel. De booglengte s, die bij de hoek hoort, is duidelijk groter dan straal r. Dat betekent dat φ groter dan 1 radiaal is. Maar hoe groot dan? Na nauwkeurig opmeten in de figuur blijkt dat de booglengte 1,8 keer zo groot is als de straal. Dus is φ = 1,8 rad.

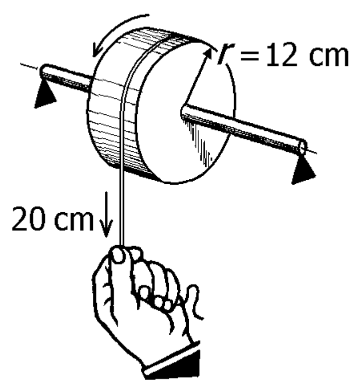
Algemeen geldt (per definitie) dat de hoek in radialen gelijk is aan het aantal keer dat de straal in de booglengte past. Dat kan je wiskundig als volgt opschrijven.

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Uit deze formule volgt dat de radiaal geen normale eenheid is zoals meter, seconde of kilogram. Als je namelijk twee afstanden (s en r) op elkaar deelt, krijg je als uitkomst een getal zonder eenheid. De letters “rad” in “φ = 1,8 rad” kun je dus eigenlijk weglaten. Toch wordt dit meestal niet gedaan om aan te geven dat het om een hoek gaat.

Bij een hoek van 360^o is de booglengte s gelijk aan de omtrek van de cirkel. Dat is 2π·r. Hieruit volgt het volgende belangrijke resultaat.
Een hoek van 360^o (één keer rond) is gelijk aan 2π radialen.

Voorbeeld van een opgave



In de figuur hiernaast is een touw om een cilinder gespannen. De cilinder heeft een straal van 12 cm. Bereken de hoekverdraaiing van de cilinder als je het touw 20 cm naar beneden trekt.

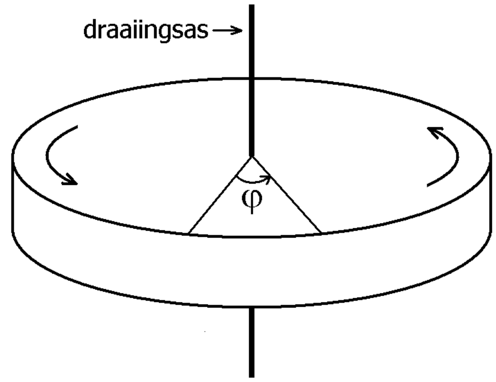
<u>Oplossing</u>

De booglengte is gelijk aan de afstand waarover het touw naar beneden is getrokken. Dus geldt de volgende berekening voor de hoekverdraaiing:

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{20\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = 1{,}67\ \text{rad}.$$

Hoeksnelheid

In deze en alle volgende paragrafen kijken we naar voorwerpen die om hun as draaien. Om aan te geven hoe snel zo'n voorwerp ronddraait, gebruiken we de grootheid hoeksnelheid. Daarmee wordt de hoekverdraaiing per tijdseenheid bedoeld. Zie de figuur hiernaast waarin een schijf ronddraait. De schijf draait in tijdsduur t over hoek φ. De hoeksnelheid kan dan (per definitie) met de volgende formule berekend worden.



$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Het symbool voor de hoeksnelheid is de Griekse letter ω (omega). De eenheid van hoeksnelheid is radiaal per seconde.

Voorbeeld van een opgave

Je rijdt een half uur op je fiets en legt daarbij een afstand van 8 km af. De straal van de fietswielen bedraagt 38 cm. Bereken de (gemiddelde) hoeksnelheid van de wielen.

<u>Oplossing</u>

De booglengte is gelijk aan de afstand die de fiets heeft afgelegd. Dus geldt voor de hoekverdraaiing van elk wiel:

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{8000\ \text{m}}{0{,}38\ \text{m}} = 21053\ \text{rad}.$$

Deze hoekverdraaiing heeft plaatsgevonden in 30 minuten. Dat is gelijk aan 30·60 s = 1800 s. Dus geldt voor de hoeksnelheid van de fietswielen:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{21053\ \text{rad}}{1800\ \text{s}} = 11{,}7\ \text{rad/s}.$$

Opgaven bij § 1

Opgave 1

a.
Wat is de definitie van het getal π (in formulevorm)?

b.
Wat is de definitie van één radiaal (in woorden)?

c.
Wat is de definitie van hoek, uitgedrukt in radialen (in formulevorm)?

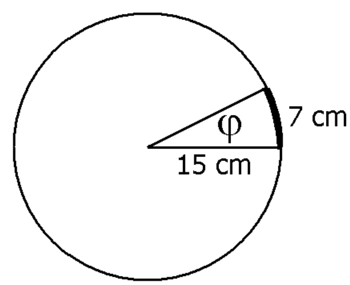
d.
Wat is de definitie van hoeksnelheid (in formulevorm)?

Opgave 2

De as van een motor draait precies één keer rond. Hoeveel radialen is de as hierbij gedraaid?

Opgave 3

In de figuur hiernaast is een cirkel verkleind afgebeeld. In werkelijkheid bedraagt de straal 15 cm en de booglengte 7 cm.
Bereken hoek φ in radialen.



Opgave 4

Een biervat rolt een kleine helling af. Hierbij is de hoekverdraaiing 82 radialen. De straal van het vat is 25 cm. Bereken de afstand die de ton heeft afgelegd.

Opgave 5

Een auto rijdt 40 m vooruit. De wielen zijn daarbij 160 radialen gedraaid.
Bereken de diameter van de wielen.

Opgave 6

Een reuzenrad op de kermis draait rond met een hoeksnelheid van 0,14 rad/s. Bereken hoeveel radialen het wiel gedraaid is in 4,5 s.

Opgave 7

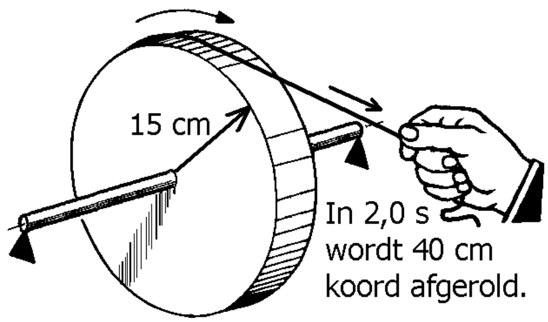
Onze aarde draait in 24 uur rond zijn as. Bereken zijn hoeksnelheid.

Opgave 8

De ventilator van een heteluchtoven heeft een hoeksnelheid van 50 rad/s. Bereken de tijd die nodig is om één keer rond te gaan.

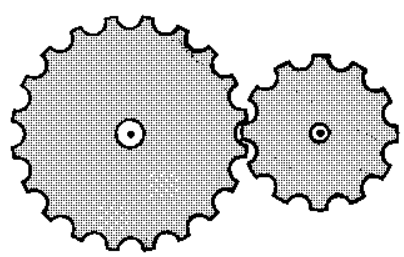
Opgave 9

In de figuur hiernaast trek je losjes aan een koord dat om een wiel gewonden is. De straal van het wiel is 15 cm. In 2,0 s is er 40 cm van het koord afgerold. Bereken de (gemiddelde) hoeksnelheid van het wiel.



Opgave 10

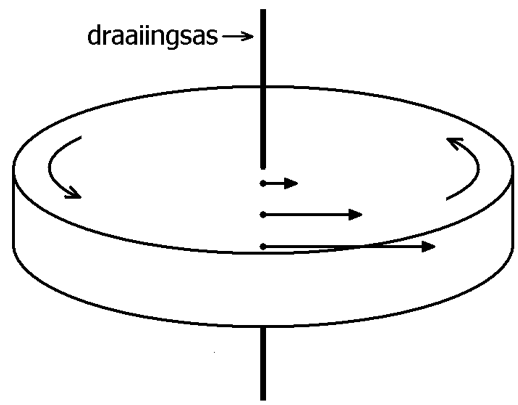
Het grote tandwiel heeft een hoeksnelheid van 2 rad/s. Bepaal de hoeksnelheid van het kleine tandwiel.



§ 2 Baansnelheid

Belangrijkste grootheden en eenheden in deze paragraaf
In de volgende tabel staan de belangrijkste grootheden en eenheden van deze paragraaf. Deze worden na de tabel besproken.

Grootheden	Eenheden
ω = hoeksnelheid	rad/s = radiaal per seconde
v = baansnelheid (omtreksnelheid)	m/s = meter per seconde (of bijv. cm/s)
r = straal	m = meter (of bijv. cm)

Baansnelheid


In de figuur hiernaast is een ronddraaiende schijf getekend. Er zitten drie vliegen op de schijf. In de figuur is de snelheid van iedere vlieg met een pijl aangegeven. De binnenste vlieg heeft de kleinste snelheid (kleinste pijl), de buitenste vlieg heeft de grootste snelheid (grootste pijl).

De snelheden van de vliegen zijn zogenoemde baansnelheden (niet te verwarren met de hoeksnelheid). De baansnelheid wordt met het symbool v aangeduid. De eenheid van de baansnelheid is meter per seconde.

Waar hangt de baansnelheid van een vlieg vanaf? Als we de drie vliegen met elkaar vergelijken zien we dat de afstand tot het midden erg belangrijk is. Dit is de straal van de cirkelbeweging van de vlieg (symbool r met als eenheid meter). Bij een twee keer zo grote straal hoort ook een twee keer zo grote snelheid. De snelheid van een vlieg is echter ook van de hoeksnelheid van de schijf afhankelijk. Immers, als de schijf twee keer zo snel ronddraait zal de snelheid van elke vlieg ook twee keer zo groot zijn. De onderstaande formule, waarmee je de baansnelheid kunt berekenen, komt dus niet als een verrassing.

$$v = \omega \cdot r$$

Stel bijvoorbeeld dat de schijf een hoeksnelheid van 2 rad/s heeft en de vlieg 30 cm van de as af zit. Dan geldt voor de baansnelheid van de vlieg:
$v = \omega \cdot r = 2 \text{ rad/s} \cdot 0{,}30 \text{ m} = 0{,}6 \text{ m/s}$.

Bewijs van de formule (wordt niet gevraagd op een toets)

De bovenstaande formule is eenvoudig te bewijzen. Uitgangspunt is de definitie voor de baansnelheid namelijk:

$$v = \frac{s}{t}$$

Door de formules uit de vorige paragraaf hierin te substitueren, vinden we de formule. Dit is gedaan in de volgende regel.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\varphi \cdot r}{t} = \frac{\varphi}{t} \cdot r = \omega \cdot r$$

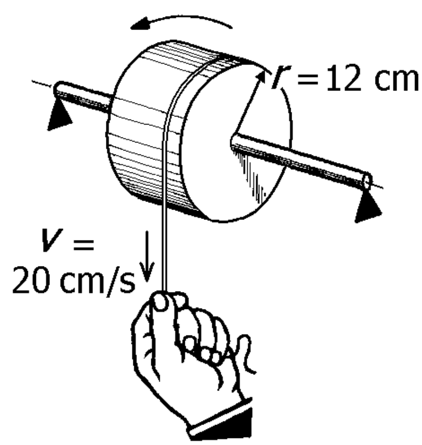
De verschillen tussen hoeksnelheid en baansnelheid kort samengevat

De hoeksnelheid ω slaat op het draaiende voorwerp als geheel. De eenheid hiervan is *radiaal per seconde*. De baansnelheid v slaat op individuele punten van het draaiende voorwerp. De baansnelheid van een punt is mede afhankelijk van de straal van zijn cirkelbeweging. De eenheid van de baansnelheid is *meter per seconde* (of bijvoorbeeld centimeter per seconde).

Bij een ronddraaiende cilinder zoals in het volgende voorbeeld spreekt men ook wel van de “omtreksnelheid” in plaats van de baansnelheid. Het gaat dan om de snelheid van de buitenrand.

Voorbeeld van een opgave

In de figuur hiernaast krijgt een cilinder een ronddraaiende beweging, doordat iemand aan een koord trekt dat om de cilinder gewonden is. Op een bepaald moment is de snelheid van het koord 20 cm/s. De straal van de cilinder is 12 cm. Bereken de hoeksnelheid van de cilinder op dat moment.



Uitwerking

Voor de omtreksnelheid (= baansnelheid van de buitenkant) van de cilinder geldt: v = 20 cm/s.
Voor de hoeksnelheid geldt dan:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{20\ \text{cm/s}}{12\ \text{cm}} = 1{,}67\ \text{rad/s}$$

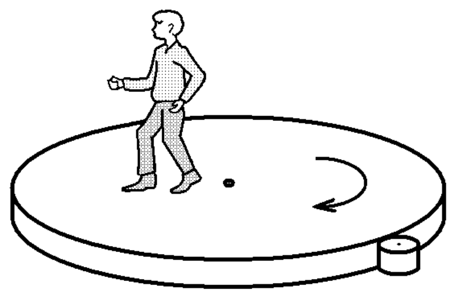
Opgaven bij § 2

Opgave 1
Schrijf achter de onderstaande grootheden de bijbehorende symbolen.
- hoeksnelheid
- baansnelheid
- straal van de cirkelbeweging

Schrijf achter de onderstaande grootheden de bijbehorende eenheden.
- hoeksnelheid
- baansnelheid
- straal van de cirkelbeweging

Opgave 2
Welke formule geeft het verband tussen de hoeksnelheid en de baansnelheid?

Opgave 3
In de figuur hiernaast loopt een jongen in een speeltuin op een ronddraaiende schijf van het midden naar de rand. De schijf wordt door een wieltje aangedreven zodat zijn toerental gelijk blijft. De jongen komt ten val.
Dit komt omdat de ________________________.
Vul hierbij twee van de volgende woorden in:
hoeksnelheid / baansnelheid / toeneemt / afneemt.



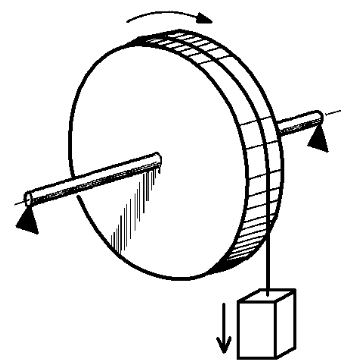
Opgave 4
Een schijf draait rond met een hoeksnelheid van 0,5 rad/s. Op de schijf zit een mier op een afstand van 20 cm van de as. Bereken de baansnelheid van de mier.

Opgave 5
De straal van de aarde is 6378000 meter. De aarde draait om zijn as. Op de evenaar hebben mensen daardoor een baansnelheid van 464 m/s (dit is 1670 km/h).
Bereken uit deze gegevens de hoeksnelheid van de aarde.

Zullen mensen in Nederland een grotere, kleinere of even grote baansnelheid hebben als mensen op de evenaar? Licht je antwoord toe.

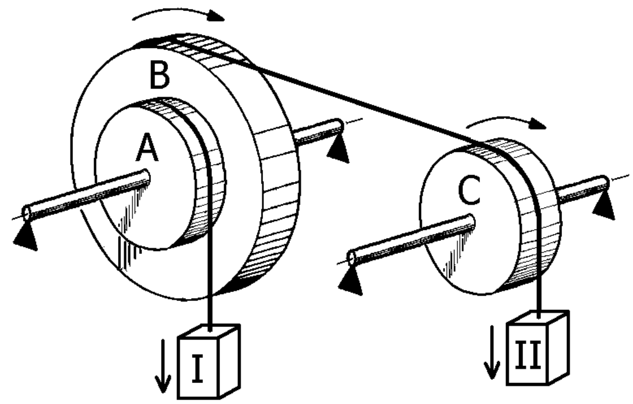
Opgave 6

In de figuur hiernaast draait een schijf met een diameter van 16 cm rond zijn as. Het koord, dat om de schijf gewonden is, wordt daarbij afgerold. De hoeksnelheid van de schijf bedraagt 0,4 rad/s. Bereken de daalsnelheid van het blokje.



Opgave 7

In de figuur hiernaast draaien de wielen A, B en C rechtsom. Wielen A en B zijn aan elkaar bevestigd. De diameters van de wielen A en C zijn even groot namelijk 5 cm. De diameter van wiel B bedraagt 9 cm.

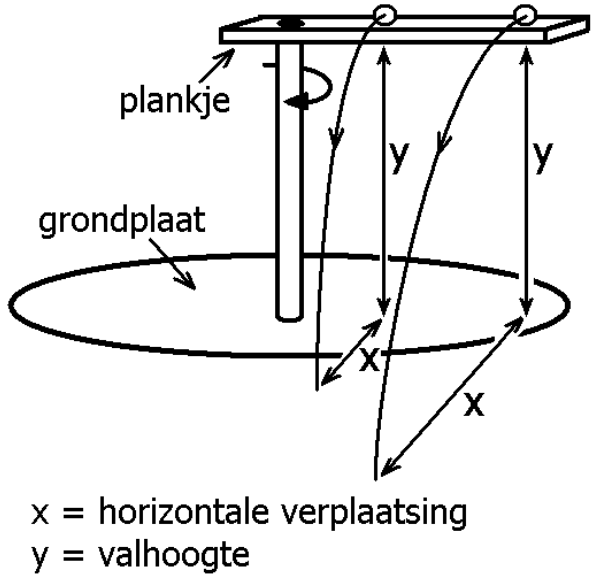


Blokje I hangt aan een koord dat om wiel A gewonden is. Zijn daalsnelheid is 3 cm/s. Blokje II hangt aan een koord dat om wiel B gewonden is.
Bereken de hoeksnelheid en omtreksnelheid van alle drie de wielen.

Opgave 8

In de figuur hiernaast liggen twee kogels op een plankje dat op een bepaalde hoogte boven de grond ronddraait. Op een bepaald moment komt het plankje abrupt tot stilstand. Doordat de kogels vaart hebben, vliegen ze van het plankje af. Iets verderop bereiken de kogels de grond. In de figuur zijn de kogelbanen getekend. Ook zijn van elke kogel de horizontale verplaatsing x en de valhoogte y aangegeven.

De waarden van y zijn voor beide kogels gelijk. Daardoor is de verhouding van de x-waarden gelijk aan de verhouding van de baansnelheden op het plankje.

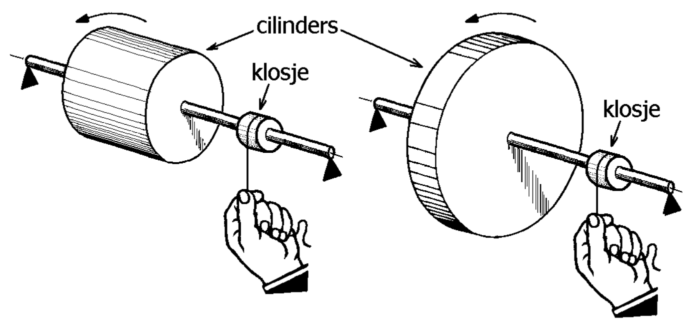


Op het plankje bevindt de binnenste kogel zich op 15 cm afstand van de draaiingsas. De afstand tussen de kogels bedraagt 20 cm. Na het loskomen van het plankje verplaatst de binnenste kogel zich in horizontale richting 22 cm (dus x = 22 cm). Bereken nu hoeveel cm de buitenste kogel zich in horizontale richting verplaatst.

§ 3 Traagheidsmoment

Traagheidsmoment

In de figuren hiernaast zijn twee assen getekend. Op elke as is een cilinder bevestigd. Beide assen worden aan het draaien gebracht door aan een koord te trekken dat om een klosje gewonden is. Stel dat aan beide koorden even hard wordt getrokken en dat de cilinders een gelijke massa hebben. Dan nog komt de rechter as langzamer op gang dan de linker as. Dat komt doordat de rechter cilinder een groter “traagheidsmoment” heeft dan de linker cilinder. In deze paragraaf wordt uitgelegd wat daarmee bedoeld wordt.

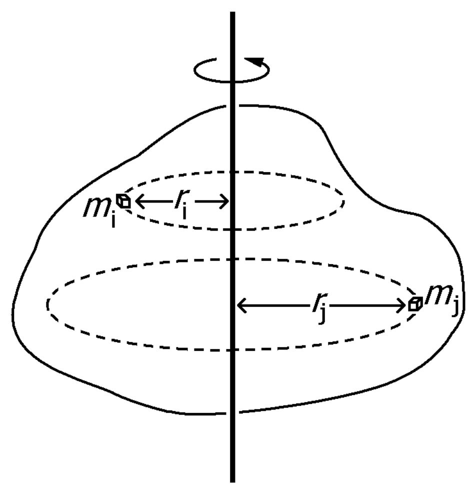


Elk voorwerp dat om een bepaalde as kan draaien heeft een zogenaamd “traagheidsmoment”. Dit kunnen we als volgt omschrijven.
Het traagheidsmoment van een voorwerp geeft aan hoe sterk het voorwerp zich verzet tegen veranderingen van zijn hoeksnelheid.

Het traagheidsmoment wordt bepaald door de massa van het voorwerp en de verdeling van deze massa. Algemeen kunnen we zeggen dat de buitenste deeltjes van een draaiend voorwerp altijd het snelst bewegen. Het zijn dan ook de buitenste deeltjes die zich het sterkst tegen veranderingen van de hoeksnelheid verzetten. Dit betekent het volgende.
Hoe verder de massa van een voorwerp van de draaiingsas af zit, hoe groter het traagheidsmoment van het voorwerp is.

Algemene formule voor het traagheidsmoment

Een draaibaar voorwerp kunnen we opvatten als een grote verzameling zeer kleine bouwsteentjes. Ieder bouwsteentje levert zijn eigen bijdrage aan het traagheidsmoment. Deze bijdrage is $m \cdot r^2$ als m de massa van het bouwsteentje is en r de afstand van het bouwsteentje tot de draaiingsas. Zie de figuur hiernaast waarin twee bouwsteentjes i en j getekend zijn. Het traagheidsmoment van het (gehele) voorwerp krijg je door alle bijdragen op te tellen.



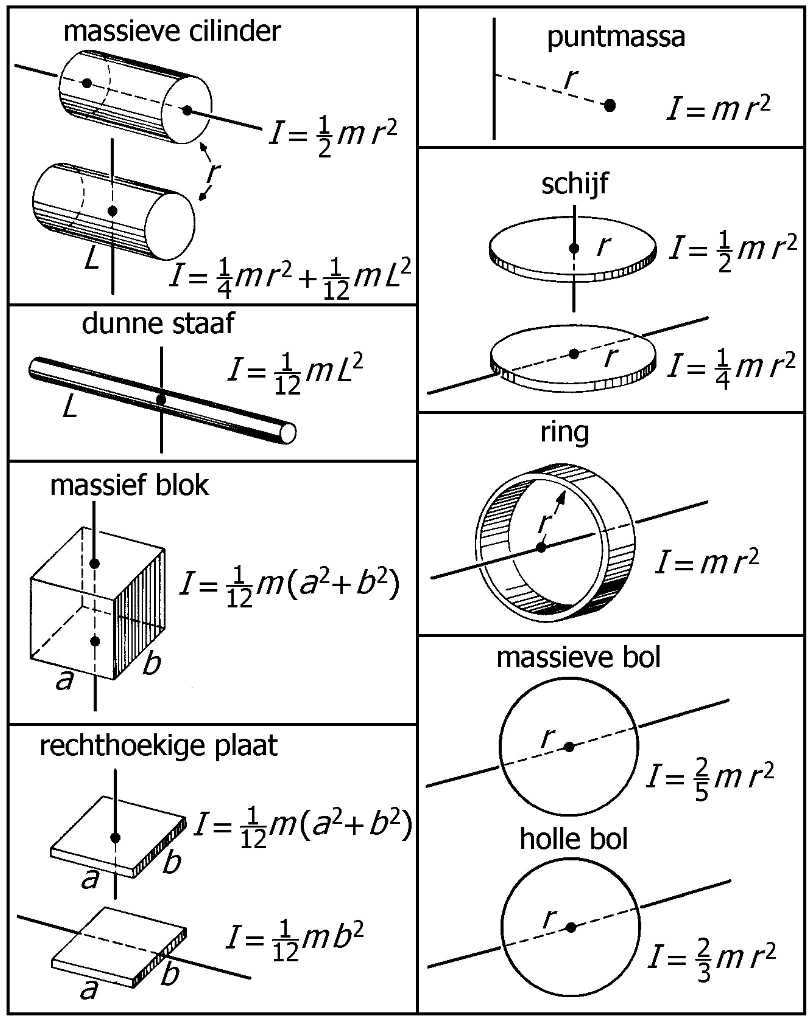
Als je alle bouwsteentjes van het voorwerp zou nummeren (1, 2, 3 enzovoort), dan geldt voor het traagheidsmoment (symbool *I*) dus de volgende formule:

$$I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \ldots\ldots.$$

Deze formule is geldig voor alle voorwerpen. Echter, de formule is niet erg praktisch in het gebruik, omdat je zeer veel (eigenlijk oneindig veel) termen moet uitrekenen, die je daarna ook nog bij elkaar moet optellen. Voor veel soorten voorwerpen zoals een cilinder of een bol zijn deze berekeningen uitgevoerd met behulp van de hogere wiskunde. De uitkomsten hiervan staan in het volgende schema.

Traagheidsmoment van een aantal voorwerpen

In het schema hiernaast is een aantal draaiende voorwerpen afgebeeld. Bij elk voorwerp staat de formule voor het traagheidsmoment vermeld.



In de formules is m de massa van het voorwerp. Deze wordt in kilogram (kg) uitgedrukt.
In de formules zijn r, L, a en b afmetingen van de voorwerpen. Deze worden in meter (m) uitgedrukt.
De eenheid van het traagheidsmoment is dan kgm^2.

Bijvoorbeeld: voor het traagheidsmoment van een cilinder waarvan de draaiingsas samenvalt met de symmetrieas, geldt:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

Neem bijvoorbeeld een stalen cilinder met een straal van 15 cm en een massa van 5,5 kg. Zijn traagheidsmoment is dan: $I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 5{,}5 \cdot 0{,}15^2 = 0{,}062\ \text{kgm}^2$

Opgaven bij § 3

Opgave 1
Een voorwerp dat om een as kan draaien heeft een traagheidsmoment. Omschrijf dit begrip.

Opgave 2
Wat is het symbool van het traagheidsmoment (als grootheid): _________

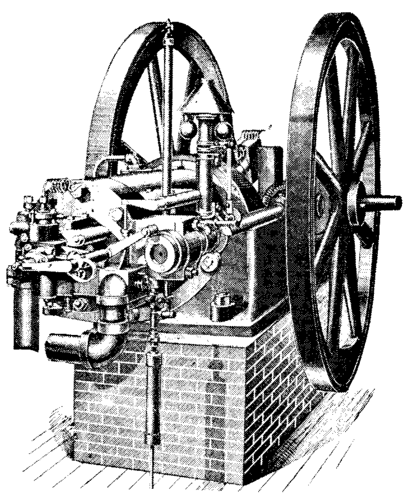
Wat is de eenheid van het traagheidsmoment: _________

Opgave 3
Schrijf de algemene formule op van het traagheidsmoment van een voorwerp.

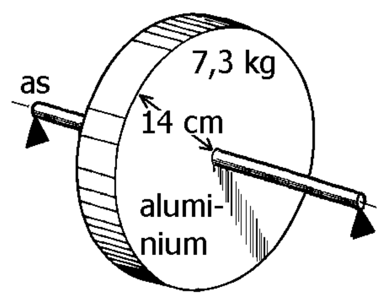
Schrijf de formule op van het traagheidsmoment van een massieve cilinder, die om zijn symmetrieas kan draaien.

Schrijf de formule op van het traagheidsmoment van een massieve bol.

Opgave 4
Hiernaast is een motor uit het jaar 1893 afgebeeld. Goed zichtbaar zijn twee enorme vliegwielen, die de motor gelijkmatig laten lopen.
Waar moet de massa van een vliegwiel hoofdzakelijk zitten voor een maximaal effect?

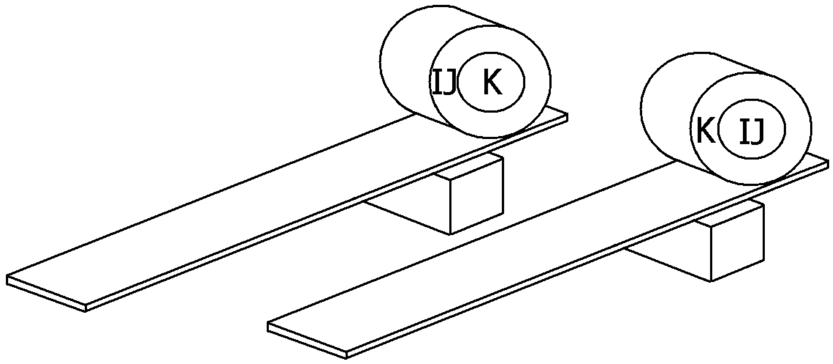


Opgave 5
Bereken het traagheidsmoment van de ronde schijf in de figuur hiernaast.



Opgave 6

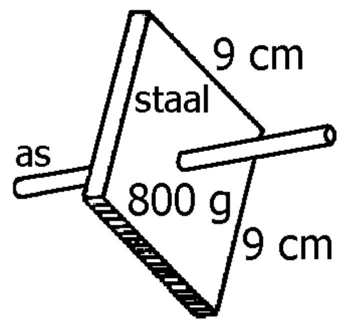
In de figuur hiernaast worden twee cilinders op een schuin plankje gelegd. De cilinders hebben dezelfde afmetingen en dezelfde massa. De linker cilinder heeft een kern van koper en een buitenkant van ijzer. De rechter cilinder heeft een kern van ijzer en een buitenkant van koper. Koper is een zwaarder metaal dan ijzer.



Door de zwaartekracht gaan de cilinders rollen. Leg uit welke cilinder het snelst beneden is.

Opgave 7

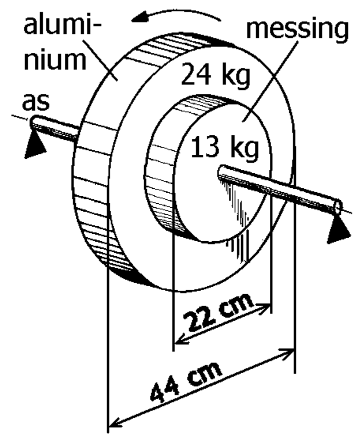
Bereken het traagheidsmoment van de vierkanten plaat in de figuur hiernaast.



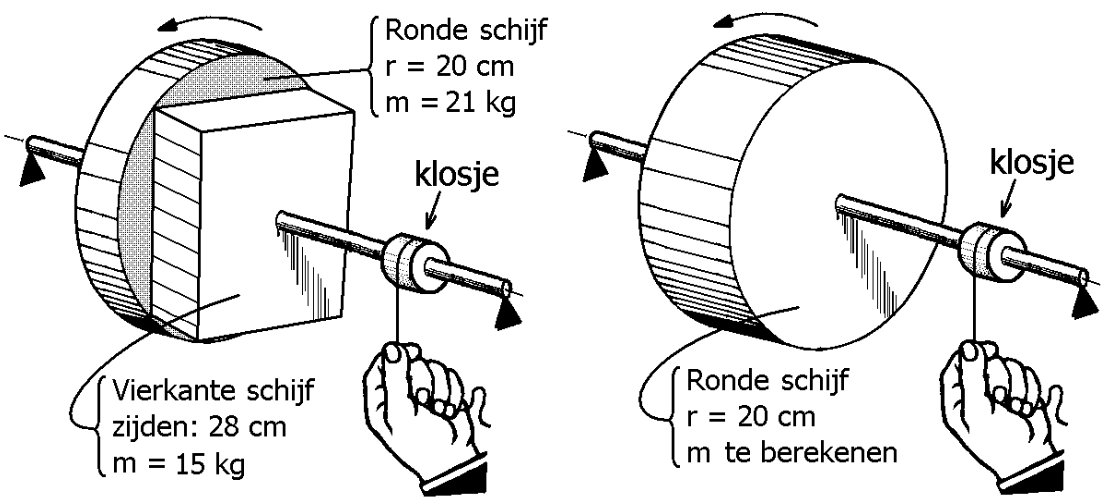
Opgave 8

De aarde is bij benadering een massieve bol, die om zijn as draait. Met de formule $I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$ kun je het traagheidsmoment van de aarde berekenen, want de massa van de aarde (m) en de straal (r) van de evenaar zijn wel in tabellenboekjes te vinden. Toch krijg je dan een uitkomst die afwijkt van de echte waarde. Geef twee redenen waarom.

Opgave 9
In de figuur hiernaast zijn twee ronde schijven op elkaar geplakt. Bereken het traagheidsmoment van het geheel.



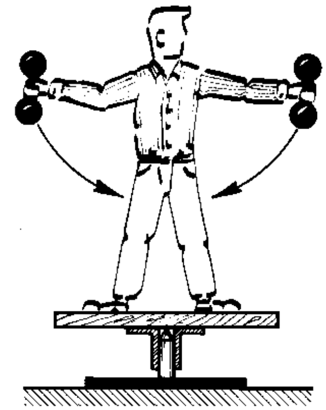
Opgave 10
In de onderstaande figuur zijn twee assen getekend. Op de linker as zijn twee schijven (één rond en één vierkant) bevestigd. Op de rechter as is één ronde dikke schijf bevestigd. Gegevens over deze schijven staan in de figuur.



De assen breng je in beweging door aan koorden te trekken die om klosjes gewonden zijn. De assen krijgen even gemakkelijk een draaisnelheid. Dat betekent dat het traagheidsmoment bij de linker as gelijk is aan het traagheidsmoment bij de rechter as. Bereken hieruit en uit de gegevens in de figuur de massa van de rechter cilinder.

§ 4 Wet van behoud van impulsmoment

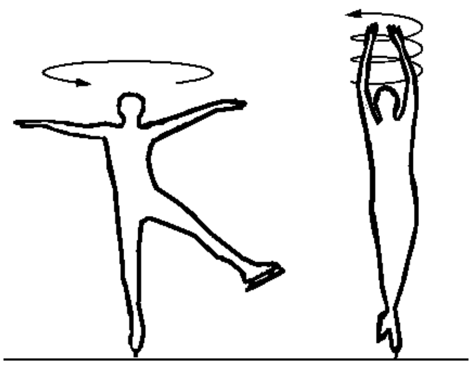
Proef op draaitafel



Je staat op een draaitafel zoals in de figuur hiernaast. Je houdt een zwaar gewicht in elke hand en strekt je armen zijwaarts. Door de omstanders wordt de tafel aan het draaien gebracht. Nadat de omstanders een stap achteruit hebben gedaan breng je je armen langs je lichaam. Terwijl je dat doet, ga je veel sneller draaien. Als je je armen daarna weer zijwaarts beweegt, neemt je hoeksnelheid weer af.

Bij het naar binnen bewegen van de gewichten verklein je het traagheidsmoment van het draaiende geheel (draaitafel plus alles wat daarop rust). Blijkbaar heeft een verkleining van het traagheidsmoment een toename van de hoeksnelheid tot gevolg.

Pirouette van een kunstschaatser



Als een kunstschaatser een pirouette uitvoert, maakt hij zich zo lang en smal mogelijk. Zie de figuur hiernaast. Hij verkleint daarmee zijn traagheidsmoment. Gelijkertijd neemt zijn draaisnelheid enorm toe.

Zoals we hierna zullen zien, blijft de uitkomst van traagheidsmoment maal de hoeksnelheid constant. Dus als het traagheidsmoment drie keer zo klein wordt, wordt de hoeksnelheid drie keer zo groot. Voorwaarde is wel dat de wrijving bij het draaien verwaarloosbaar klein is.

Impulsmoment

Elk voorwerp, dat ronddraait, heeft een zogenaamd “impulsmoment”. Dit kan op een weinig wetenschappelijke manier als volgt omschreven worden.
Het impulsmoment van een draaiend voorwerp is de hoeveelheid draaibeweging van het voorwerp.

Gevoelsmatig hangt het impulsmoment af van het traagheidsmoment van het voorwerp en van zijn hoeksnelheid. Inderdaad geldt het volgende verband tussen deze grootheden (zonder verdere toelichting).
impulsmoment = traagheidsmoment x hoeksnelheid

Wet van behoud van impulsmoment

Voor een draaiend voorwerp geldt de wet van behoud van impulsmoment. Deze luidt als volgt.

Het impulsmoment van een voorwerp, dat om een vaste as draait, is constant als er geen krachten op het voorwerp werken of slechts krachten met werklijnen die deze as snijden.

Als er wrijvingskrachten op het draaiende voorwerp werken, geldt de wet van behoud van impulsmoment in principe niet meer. Ze hebben namelijk werklijnen, die de draaiingsas NIET snijden. Wrijvingskrachten werken de draaibeweging altijd tegen en veroorzaken dus een afname van het impulsmoment. In deze paragraaf verwaarlozen we verder de rol van wrijving.

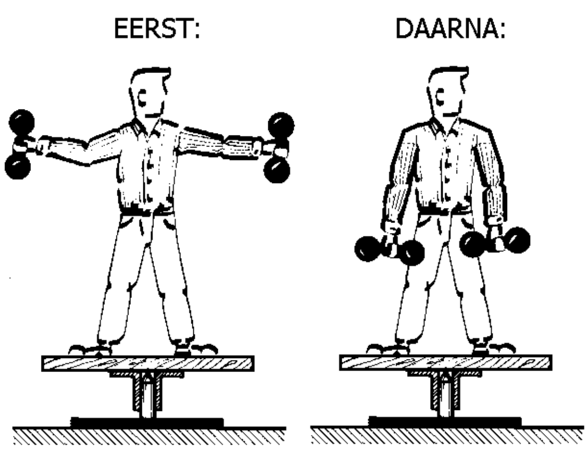
In de wet van behoud van impulsmoment wordt gesproken over een voorwerp. Dat moet ruim worden opgevat. Bijvoorbeeld vatten we de kunstschaatser van hierboven ook op als voorwerp. En de combinatie van man plus draaitafel plus gewichten is ook een voorwerp.

Als de vorm van het ronddraaiende voorwerp verandert, zoals bij de kunstschaatser het geval is, verandert het traagheidsmoment en daarmee automatisch ook de hoeksnelheid. Het product “traagheidsmoment maal hoeksnelheid” blijft echter gelijk. Als het traagheidsmoment verandert van I_1 naar I_2 en de hoeksnelheid van ω_1 naar ω_2, dan geldt:

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$

Voorbeeld van een gemakkelijke opgave

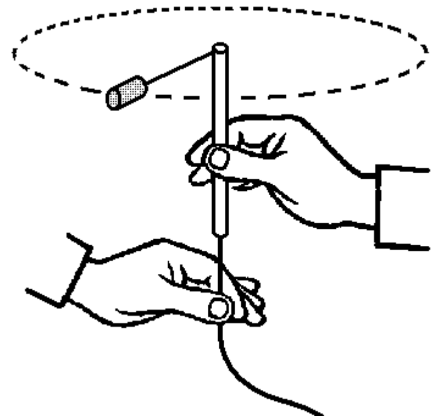
In de figuren hiernaast staat een man met gewichten in zijn handen op een draaitafel. Het geheel (tafel + man + gewichten) draait rond. Eerst houdt hij de gewichten zover mogelijk van zich af (linker figuur). In die stand is het traagheidsmoment van het draaiende geheel 6,0 kgm^2 en is de hoeksnelheid 0,50 rad/s. Daarna beweegt hij de gewichten naar zich toe (rechter figuur). Het traagheidsmoment is dan nog 3,5 kgm^2. Bereken de hoeksnelheid in de nieuwe situatie.



De berekening gaat als volgt.

$$\omega_2 = \frac{I_1 \cdot \omega_1}{I_2} = \frac{6{,}0 \cdot 0{,}50}{3{,}5} = 0{,}86 \text{ rad/s}$$

Voorbeeld van een iets moeilijker opgave



In de figuur hiernaast slinger je een kurk of een ander licht voorwerp rond aan een touwtje. Het touwtje loopt door een pijpje naar beneden. Als je de straal van de cirkelbeweging kleiner maakt door aan het touwtje te trekken gaat de kurk sneller rond draaien. Dit is logisch, want als het traagheidsmoment kleiner wordt, neemt de hoeksnelheid toe.

De straal van de cirkelbeweging gaat van 40 cm (beginsituatie) naar 20 cm (eindsituatie). De snelheid van de kurk bedraagt in de beginsituatie 10 cm/s. Dit is natuurlijk de baansnelheid en niet de hoeksnelheid. Verder is gegeven dat de massa van de kurk 50 g is en dat de kurk als een puntmassa kan worden opgevat.
Bereken de snelheid van de kurk in de eindsituatie.

De berekening loopt als volgt.

In de beginsituatie (index 1) geldt:	Toelichting
$I_1 = m \cdot r_1^2 = 0{,}05 \cdot 0{,}40^2 = 0{,}0080\ \text{kgm}^2$	Traagheidsmoment van puntmassa berekenen
$\omega_1 = \dfrac{v_1}{r_1} = \dfrac{0{,}10}{0{,}40} = 0{,}25\ \text{rad/s}$	Hoeksnelheid uit baansnelheid berekenen
In de eindsituatie (index 2) geldt:	
$I_2 = m \cdot r_2^2 = 0{,}05 \cdot 0{,}20^2 = 0{,}0020\ \text{kgm}^2$	Traagheidsmoment van puntmassa berekenen
$\omega_2 = \dfrac{I_1 \cdot \omega_1}{I_2} = \dfrac{0{,}0080 \cdot 0{,}25}{0{,}0020} = 1{,}0\ \text{rad/s}$	Wet van behoud van impulsmoment toepassen
$v_2 = \omega_2 \cdot r_2 = 1{,}0 \cdot 0{,}20 = 0{,}20\ \text{m/s} = 20\ \text{cm/s}$	Baansnelheid uit hoeksnelheid berekenen

Bij het halveren van de straal blijkt de hoeksnelheid dus vier keer zo groot te worden en de baansnelheid twee keer zo groot.

Opgaven bij § 4

Opgave 1

Een voorwerp, dat om een as draait, heeft een impulsmoment. Omschrijf dit begrip.

Opgave 2

Een voorwerp, dat rond een as draait, heeft een impulsmoment, een traagheidsmoment en een hoeksnelheid. Wat is het verband tussen deze drie grootheden?

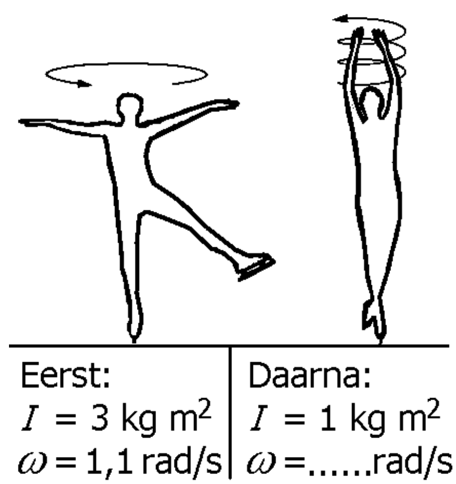
Opgave 3

Hoe luidt in woorden de wet van behoud van impulsmoment?

Geef de bijbehorende formule (zoals die in de hierboven staande tekst staat).

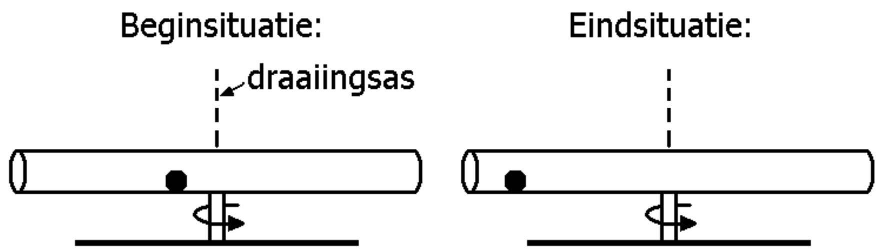
Opgave 4

Een schaatser voert een pirouette uit. Hij begint met een traagheidsmoment van 3 kgm^2 en een hoeksnelheid van 1,1 rad/s. Nadat hij zich lang en smal gemaakt heeft, heeft hij een traagheidsmoment van 1 kgm^2.
Bereken hoe groot zijn hoeksnelheid dan is.



Opgave 5

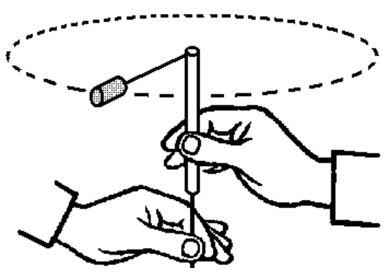
In de figuren hiernaast draait een plastic buis rondjes om een verticale as. In de buis bevindt zich een ijzeren blokje. In de beginsituatie ligt het blokje niet ver van het midden van de buis. Op een bepaald moment schiet het blokje los en schuift over een bepaalde afstand van de as weg. In de eindsituatie ligt het blokje weer stil in de (draaiende) buis.



In de beginsituatie draait de buis met een hoeksnelheid van 5,4 rad/s rond. Het traagheidsmoment van het hele systeem (buis plus blokje) bedraagt 0,03 kgm^2. In de eindsituatie is de hoeksnelheid nog maar 1,8 rad/s. Bereken de toename van het traagheidsmoment door het verschuiven van het blokje.

Opgave 6

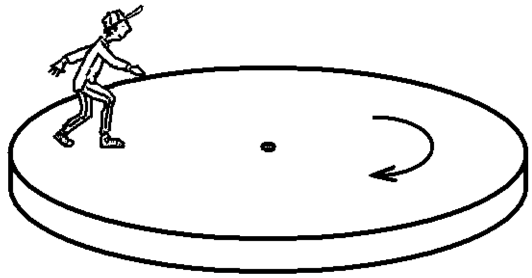
In de voorgaande tekst werd een kurk aan een touwtje rondgeslingerd. Zie ook de onderstaande figuur. In deze opgave wordt de straal r van de cirkelbeweging in stappen gevarieerd door het touwtje in of uit de onderkant van het pijpje te schuiven. Dat heeft gevolgen voor het traagheidsmoment *I*, de hoeksnelheid ω en de baansnelheid v van de kurk. Vul nu de tabel verder in. Beschouw de kurk hierbij als een puntmassa.



r wordt	I wordt	ω wordt	v wordt
2 x groter			
3 x groter			
4 x kleiner			

Opgave 7

Teartse is in een speeltuin en heeft een interessant speeltoestel ontdekt, namelijk een grote draaibare schijf. Hij wil hiermee de wet van behoud van impulsmoment testen. Hij geeft de schijf een draaisnelheid en springt er op. Vervolgens loopt hij voorzichtig naar het midden zoals in de figuur hiernaast te zien is. En inderdaad: de schijf (met hem erop) gaat sneller draaien!



Over dit experiment gaat deze opgave. De lege draaischijf heeft een traagheidsmoment van 300 kgm^2. Teartse heeft een massa van 48 kg en is klein ten opzichte van de schijf. In deze opgave kan hij worden opgevat als een puntmassa (van 48 kg) op de plaats van zijn zwaartepunt.

In de beginsituatie staat Teartse aan de rand van de draaischijf. Zijn zwaartepunt bevindt zich 2,5 m van de draaiingsas af. De schijf heeft dan een hoeksnelheid van 0,6 rad/s.

a.

Laat met een berekening zien dat de bijdrage van Teartse aan het traagheidsmoment in deze beginsituatie 300 kgm^2 is.

b.

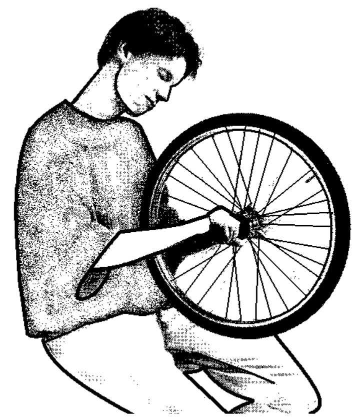
Als Teartse voorzichtig naar de draaiingsas toe loopt, neemt de hoeksnelheid toe. Leg uit dat de hoeksnelheid van de schijf echter nooit groter dan 1,2 rad/s kan worden.

c.

Op een bepaald moment is de hoeksnelheid opgelopen tot 0,9 rad/s. Bereken in die situatie de afstand tussen het zwaartepunt van Teartse en de draaiingsas.

§ 5 De richting van de draaiingsas veranderen

Proef met fietswiel



In de figuur hiernaast houd je het voorwiel van een fiets bij de uiteinden van de draaiingsas vast. Eerst laat je het wiel nog niet draaien. Je hebt dan weinig kracht nodig om het wiel in zijn geheel naar voren en/of zijwaarts te bewegen. Ook kan je de richting van de as gemakkelijk veranderen, bijvoorbeeld door je rechter hand naar beneden en je linker hand naar boven te bewegen.

Vervolgens voer je de proeven opnieuw uit nadat iemand het wiel een flinke draaisnelheid heeft gegeven. Je kunt het wiel opnieuw met weinig kracht naar voren en/of zijwaarts bewegen. Echter, het veranderen van de richting van de as gaat nu helemaal niet zo eenvoudig meer. En hoe harder het wiel ronddraait, des te meer kracht nodig is.

Bovendien merk je, als je de draaiingsas van richting probeert te veranderen, iets vreemds. De richting van de as verandert steeds op een andere manier dan je verwacht. Stel bijvoorbeeld dat je de ene kant van de as omhoog en de andere kant van de as omlaag probeert te trekken. Dan bewegen die kanten helemaal niet omhoog of omlaag! Eén kant beweegt dan namelijk naar je toe en de andere kant van je af.

Samengevat kunnen we zeggen, dat hoe harder een wiel rond zijn as draait, des te meer kracht je nodig hebt om de richting van de as te veranderen. Bovendien verandert de richting van de as anders dan je zou denken. Stel bijvoorbeeld, dat je de stand van het wiel wilt veranderen met een trekkracht en een duwkracht op de uiteinden van de as. Dan bewegen deze uiteinden niet in de richting van de krachten maar loodrecht daarop.

Het feit dat de draaiingsas niet in de richting van de krachten beweegt (maar loodrecht daarop) komen we verderop in deze paragraaf weer tegen namelijk bij ‘precessie’. Aan het einde van de paragraaf wordt een poging ondernomen om deze richtingsverandering uit te leggen.

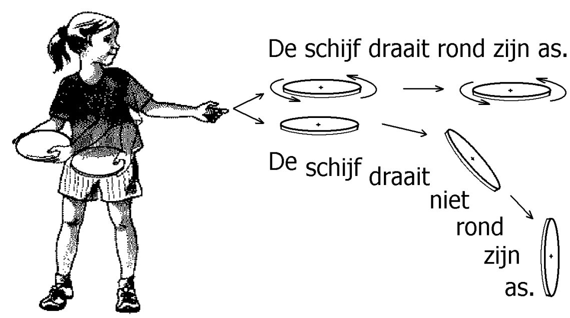
De stand van een voorwerp stabiel houden met een draaibeweging

De bovengenoemde eigenschappen van een draaiend fietswiel zijn in meer of mindere mate geldig voor alle voorwerpen die om hun as draaien. Algemeen kun je daarom het volgende zeggen.

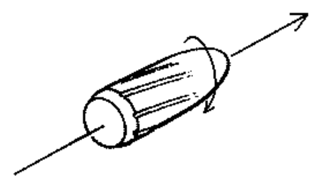
Een voorwerp dat om zijn as draait, verzet zich sterker tegen veranderingen van zijn stand naarmate zijn hoeksnelheid groter is.

In veel situaties is het wenselijk dat de stand van een voorwerp niet of nauwelijks verandert. Een oplossing is dan om het voorwerp een flinke draaibeweging om zijn as te geven. Zie de volgende voorbeelden.

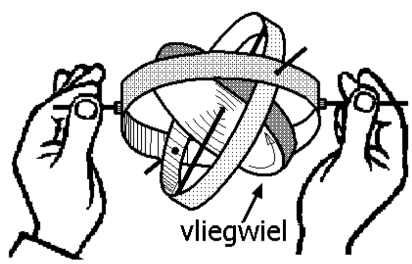
In de figuur hiernaast werpt een meisje een ronde schijf zoals een frisbee in horizontale richting weg. Als ze de schijf geen draaibeweging meegeeft, klapt de schijf door de luchtwrijving snel om en valt vervolgens naar beneden. Als ze de schijf wel een draaibeweging meegeeft, behoudt de schijf zijn beginstand veel langer en blijft dan ook langer in de lucht.



Een geweer of pistool is zo gemaakt dat een kogel na het afvuren een grote voorwaartse snelheid heeft en bovendien rond zijn lengteas draait. Zie de figuur hiernaast. Door de draaibeweging van de kogel wordt zijn baan stabieler. De oorspronkelijke richting van de kogel blijft beter behouden.



Een draaiend voorwerp verzet zich tegen veranderingen van zijn asrichting. Deze eigenschap wordt toegepast in een gyroscoop zoals in de figuur hiernaast is getekend. Een gyroscoop bestaat uit een snel draaiend wiel (vliegwiel) waarvan de as vrij van richting kan veranderen. Het kenmerk van een gyroscoop is dat de stand van het vliegwiel gelijk blijft, ook al verdraai je de "buitenkant" van de gyroscoop.

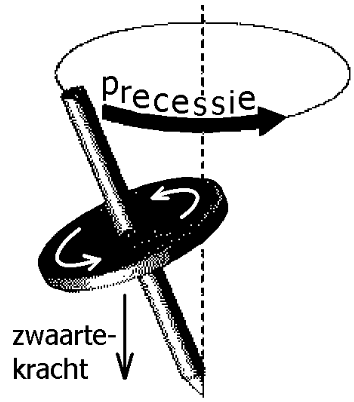


Precessie van een draaitol

Onder precessie verstaan we het volgende.

Precessie is het veranderen van de richting van de draaiingsas van een draaiend voorwerp onder invloed van uitwendige krachten.

Zonder zulke uitwendige krachten wijst de as steeds in dezelfde richting zoals bij een gyroscoop.



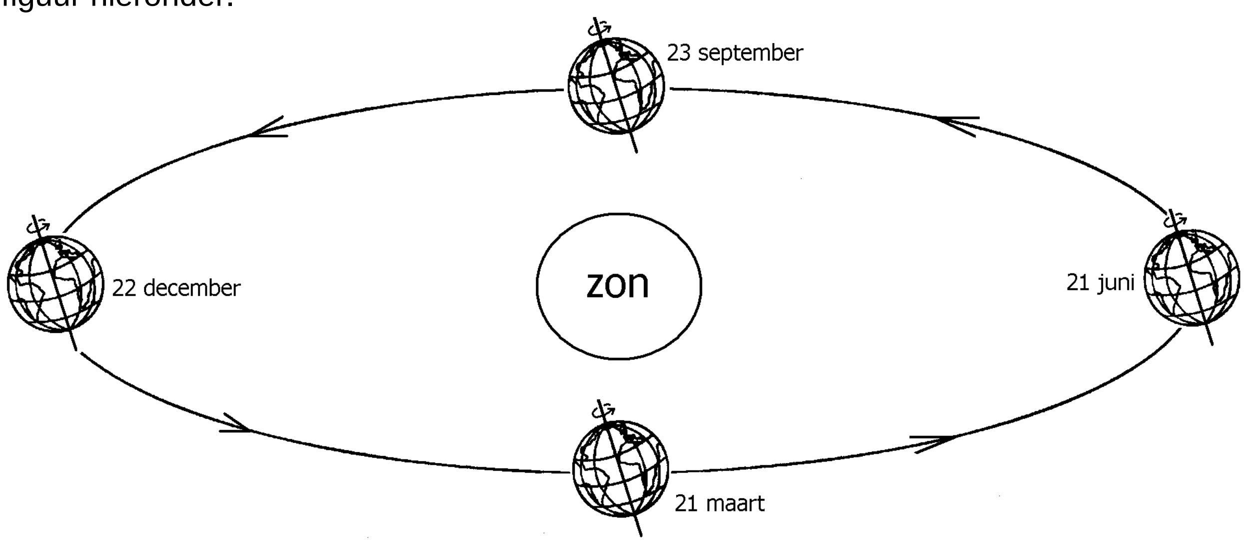
Precessie kan je goed zien bij een draaiende draaitol. Zie de figuur hiernaast. Als de tol niet precies rechtop staat, zal de zwaartekracht (in combinatie met de reactiekracht van de vloer) proberen om de draaiingsas om te laten vallen. Dat gebeurt echter niet: in plaats daarvan draait de draaiingsas rond om de verticaal (de stippellijn in de figuur).

De richting van de draaiingsas verandert dus geheel anders dan je zou verwachten. Iets soortgelijks hadden we eerder ook al gezien bij het draaiende fietswiel waarvan je de stand wilde veranderen.

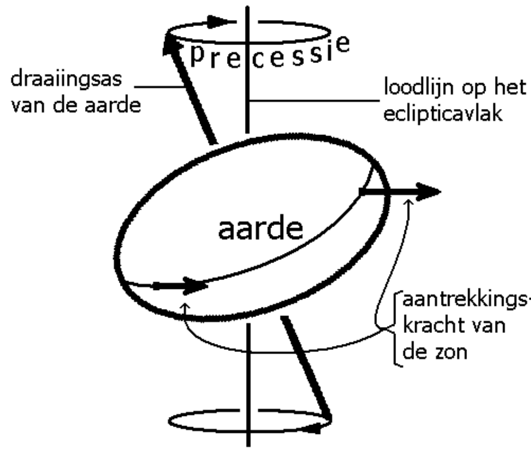
Naarmate de tol sneller rond zijn as draait, gaat de tol langzamer rond de verticaal precederen (= precessie uitvoeren). Dat is logisch, want de tol verzet zich dan sterker tegen richtingsveranderingen van zijn draaiingsas.

Precessie van de aarde

De aarde draait in 24 uur rond zijn eigen as. Bovendien draait de aarde in één jaar in een baan om de zon. Beide draairichtingen zijn, van boven af gezien, linksom. Zie de figuur hieronder.



Het eclipticavlak is het vlak waarin de aarde om de zon beweegt. Zoals te zien is, staat de aardas niet loodrecht op het eclipticavlak. Door deze schuine stand zijn er seizoenen. Zo valt er op 21 juni bijvoorbeeld meer zonlicht op het noordelijk halfrond en op 22 december meer zonlicht op het zuidelijk halfrond.



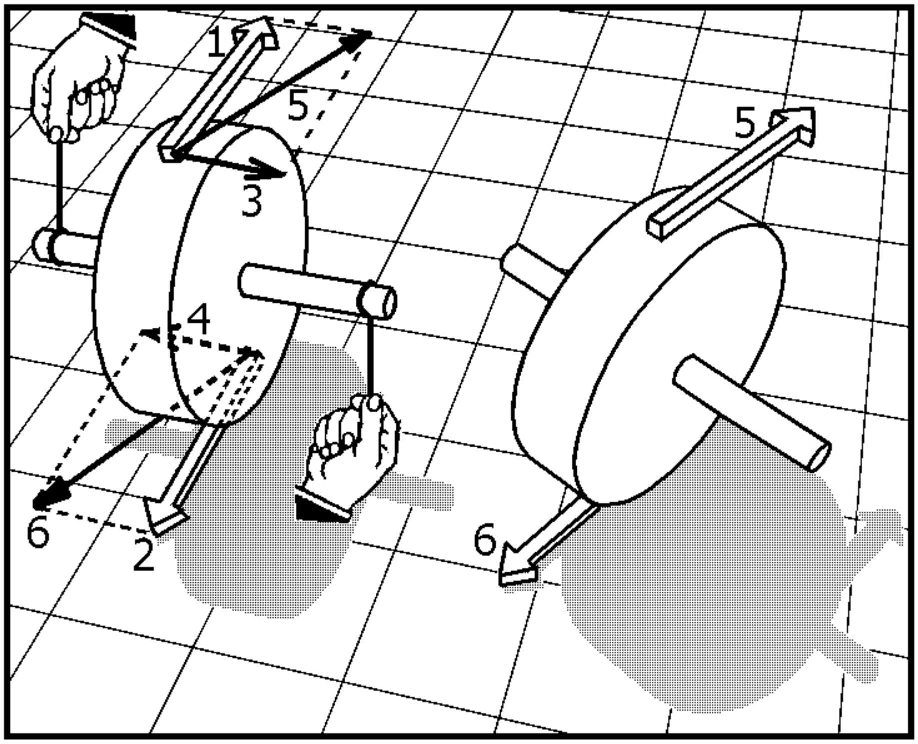
In de bovenstaande figuur heeft de aardas één en dezelfde richting en wijst dus steeds naar hetzelfde punt aan de sterrenhemel. Maar in werkelijkheid verandert de aardas zeer langzaam van richting. In de figuur hiernaast is de beweging van de aardas getekend. Deze draait rond de loodlijn op het eclipticavlak. Net als bij een draaitol spreken we over precessie. Alleen gaat de precessie van de aardas wel erg langzaam. Het duurt namelijk ongeveer 26 duizend jaar voordat de as zijn oorspronkelijke richting weer heeft ingenomen. Zoals hierna wordt uitgelegd, wordt de precessie veroorzaakt door het feit, dat de aarde afgeplatte polen heeft. In de figuur is deze afplatting overdreven getekend.

In de figuur bevindt de zon zich rechts van de aarde (zoals op 22 december in de op een na laatste figuur). Omdat de rechter helft van de aarde dichter bij de zon ligt dan de linker helft, is de aantrekkingskracht van de zon op de rechter helft groter dan op de linker helft. Dit is weergegeven met twee pijlen van verschillende lengte. Je zou verwachten dat de getekende krachten de draaiingsas als het ware verticaal trekken. Maar in plaats daarvan gaat de aardas precederen rond de loodlijn op het eclipticavlak. Overigens oefent de maan ook een aantrekkingskracht op de aarde uit. Om dezelfde redenen als bij de zon levert de maan daardoor ook een (aanzienlijke!) bijdrage aan de precessie van de aardas.

De draaitol vergeleken met de aarde

Het is aardig om de draaitol te vergelijken met de aarde. Zowel de tol als de aarde draaien van bovenaf bekeken, linksom rond hun draaiingsas. Bij de tol proberen de uitwendige krachten de as als het ware horizontaal te trekken. Bij de aarde proberen de uitwendige krachten de as juist verticaal te trekken. Daarom is de draairichting van de precessie bij de tol tegengesteld aan die bij de aarde. Bij de tol is deze namelijk linksom en bij de aarde rechtsom. Ga dat in de figuren na.

Een draaiend wiel nader bekeken



In de figuur hiernaast is een draaiend wiel in twee standen getekend. Ook zijn met dikke pijlen (genummerd 1, 2, 5 en 6) de snelheden van het bovenste en onderste deel van het wiel aangegeven.

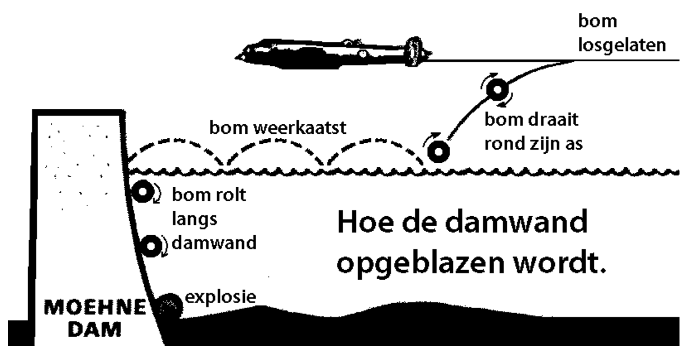
Als het wiel van de eerste stand naar de tweede stand gaat, veranderen deze snelheden van richting. En dat kost nou eenmaal moeite. Vergelijk dat bijvoorbeeld met een slippende auto. Die verandert ook niet vanzelf van richting.

Dat een draaiend wiel voor je gevoel vreemd reageert op krachten kunnen we als volgt begrijpen. De linker kant van de draaiingsas wordt naar boven getrokken en de rechter kant naar beneden. De bovenkant van het wiel krijgt daardoor een snelheid naar rechts (pijl 3) en de onderkant een snelheid naar links (pijl 4). Maar de boven- en onderkant hadden al grote snelheden (pijlen 1 en 2). De uiteindelijke snelheden zijn dus iets van richting veranderd (pijlen 5 en 6).

Opgaven bij § 5

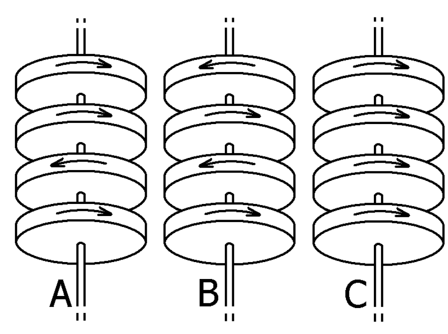
Opgave 1
Leg uit waarom het met losse handen fietsen gemakkelijker is bij hoge snelheid dan bij lage snelheid.

Opgave 2
In de Tweede Wereldoorlog hebben de geallieerden in Duitsland twee stuwdammen met explosieven opgeblazen (operatie Chastise). Dat ging als volgt. Zie ook de figuur hiernaast. Boven het water liet een vliegtuig een bom los. Deze bom had de vorm van een cilinder en draaide zeer snel rond zijn lengteas. De bom weerkaatste een aantal keer tegen het wateroppervlak waarna hij tegen de damwand aan botste. Vervolgens zonk de bom. Onderaan de damwand ging de bom af.



Tot aan het moment van de explosie draaide de bom in de figuur rechtsom (dus met de wijzers van de klok mee). Dat had het voordeel dat de bom tijdens het zinken tegen de damwand aan bleef kleven dankzij het zogenaamde Magnus-effect. Het roteren van de bom (ongeacht linksom of rechtsom) had echter nog een ander voordeel. Welk voordeel zou dat zijn? Leg je antwoord uit.

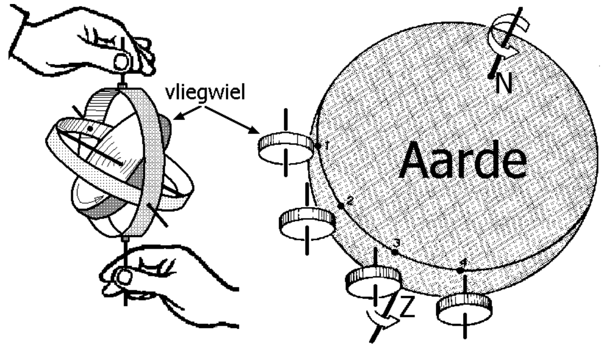
Opgave 3
In de figuur hiernaast staan drie assen afgebeeld. Op elke as zijn vier gelijke wielen geschoven. Alle wielen draaien met dezelfde draaisnelheid rond. De draairichting van elk wiel is in de figuur aangegeven. Welke as zal het gemakkelijkst van richting kunnen veranderen? En welke as het moeilijkst?



Opgave 4
Een straalmotor van een vliegtuig heeft meestal slechts één lange as. Een aantal delen van de motor draait zeer snel rond deze as. Een straalmotor is zo gemaakt dat de draairichting van bepaalde delen tegengesteld is aan die van andere delen. Leg uit waarom niet alle delen dezelfde draairichting hebben.

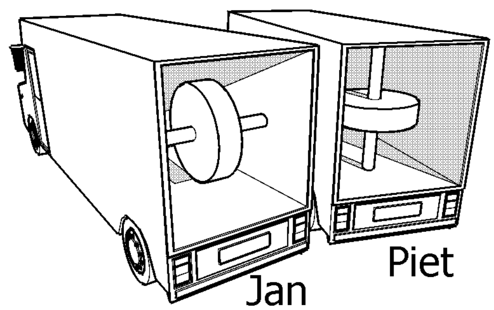
Opgave 5

Als we zeggen dat de stand van het vliegwiel gelijk blijft, is dat ten opzichte van de ruimte! Door de draaiing van de aarde kan de stand van het vliegwiel in een gyroscoop schijnbaar langzaam veranderen. Dat zie je bijvoorbeeld in de figuur hiernaast. De punten 1, 2, 3 en 4 stellen één en hetzelfde punt van de aarde voor. Hoe lang duurt het voordat de stand van de draaiingsas van horizontaal naar verticaal is gegaan?



Opgave 6

Jan en Piet rijden ieder een vrachtwagen naar Zuid-Afrika. Ze doen mee aan een wedstrijd om zo weinig mogelijk brandstof te verbruiken. Daarom hebben ze in hun vrachtwagen een vliegwiel gebouwd. Zie de figuur hiernaast. Bij het remmen wordt de bewegingsenergie van de vrachtwagen omgezet in rotatie-energie van het vliegwiel. Bij het optrekken geeft het vliegwiel deze energie dan weer terug aan de vrachtwagen. En dan nu de vraag. Met welke van de twee vrachtwagens kun je beter een bocht maken? Leg je antwoord uit.



Opgave 7

Wat verstaan we onder precessie?

Opgave 8

In de tekst wordt de beweging van de aarde beschreven.

a.

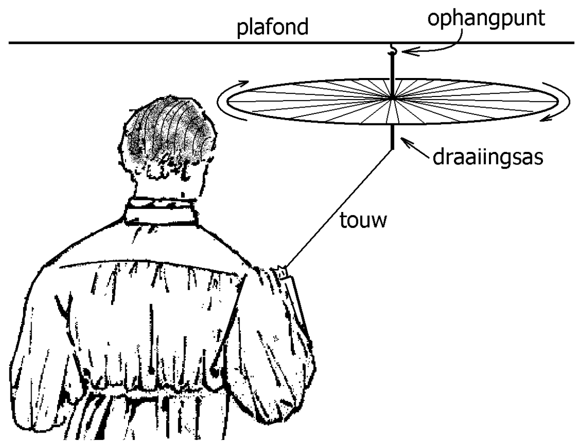
Welke drie soorten draaiing worden genoemd? Hoe groot is de ‘rondetijd’ van elke?

b.

Welke soort draaiing noemen we de precessie?

Opgave 9

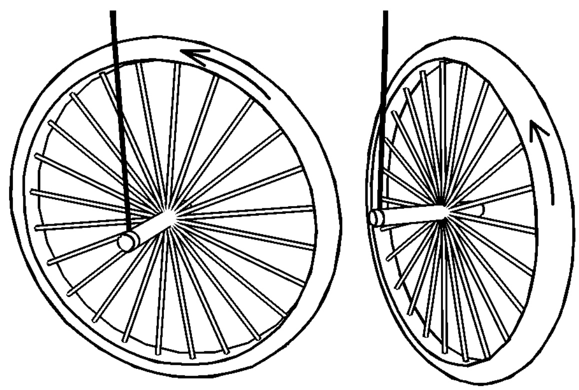
In de figuur hiernaast hangt Gino een fietswiel aan het plafond. Eén uiteinde van de draaiingsas is daarbij als ophangpunt genomen. Dankzij de draaibare ophanging en de tamelijk lange as kan het wiel een beetje heen en weer slingeren.



Nu doet Gino een proef. Terwijl hij de as zuiver verticaal houdt, geeft hij het wiel een flinke draaisnelheid. Hij verbindt het onderste uiteinde van de as met een touw en rukt hier even aan. In welke richting zal het onderste uiteinde van de as ten gevolge van de ruk dan bewegen?
Kies uit ‘naar Gino toe’, ‘van Gino af’ of ‘opzij (vanuit Gino’s positie gezien)’.

Opgave 10

In de figuur hiernaast heeft een fietswiel een flinke draaisnelheid. Het fietswiel wordt aan één kant van de draaiingsas opgehangen aan een touw en vervolgens losgelaten. Tot ieders verbazing valt het wiel niet naar beneden maar gaat precederen. De as blijft daarbij vrijwel horizontaal.



eerst even later

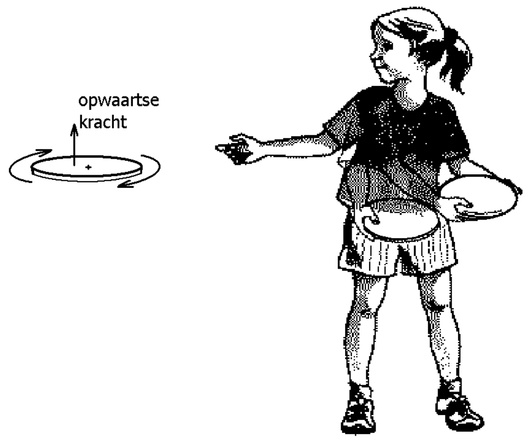
Bij een precessie is er altijd een uitwendige kracht (of krachten) die de richting van de draaiingsas beïnvloeden.

a.
Welke krachten zijn hier de uitwendige krachten?

De uitwendige krachten zorgen voor een verandering van de richting van de draaiingsas. Deze verandering is verschillend bij een niet draaiend fietswiel en een wel draaiend fietswiel.

b.
Leg dat uit.

Opgave 11
In de figuur hiernaast werpt een meisje een frisbee weg. De luchtstroming aan de boven- en onderkant van de frisbee is zodanig dat er op de frisbee een opwaartse kracht werkt. Dankzij de opwaartse kracht blijft de frisbee langer in de lucht.



a.
Leg uit waarom de draaibeweging van de frisbee belangrijk is.

Bij een frisbee moet het aangrijpingspunt van de opwaartse kracht in het zwaartepunt van de frisbee werken. Dan heffen opwaartse kracht en zwaartekracht elkaar volledig op. Bij de frisbee in de figuur is het aangrijpingspunt naar de voorzijde van de frisbee verschoven. De frisbee zal daardoor gaan precederen.
b.
Zal daardoor de voorkant of een zijkant van de frisbee omhoog komen?